ANNALS of the ORADEA UNIVERSITY.

Fascicle of Management and Technological Engineering

Stabilirea matricei de legatura dintre deformatii specifice si deplasari (matricea B) pentru calculul la fluaj al sistemelor de conducte -partea I-a

Niculae GRIGORE
Universitatea Petrol-Gaze din Ploiesti

Cuvinte cheie: deformatii specifice, fluaj, matrice

Le résumé: Le travaux present les etapaux du l' algoritm pour le calcul à la fluage pour les sistems de conducts.

Bazele algoritmului pentru calculul la fluaj al conductelor

La baza algoritmului elaborat pentru calculul la fluaj al conductelor sta metoda elementelor finite, care, în cazul elementelor finite de tip bara, coincide cu metoda deplasarilor [1,2].

În [2] s-a prezentat algoritmul pentru calculul static în domeniul elastic, pe baza metodei deplasarilor, unde s-a stabilit mai întâi matricea de rigiditate $\underline{\mathrm{K}}^{(e)}$ pentru fiecare element de tip bara si apoi matricea de rigiditate $\underline{\mathrm{K}}$ pentru întreaga structura a conductei.

Atât în metoda deplasarilor, cât si în cazul general al metodei elementelor finite, necunoscutele problemei sunt deplasarile nodurilor, grupate în vectorul $\underline{Z}$.

Sistemul algebric de ecuatii are forma matriceala

$$\underline{\mathrm{K}} \cdot \underline{Z} = \underline{F} \,,$$

unde $\underline{F}$ este vectorul coloana al fortelor exterioare.

Esenta algoritmului contsta în efectuarea calculului la fluaj în mod incremental ca o succesiune de etape de calcul liniar.

Acest procedeu prezinta avantajul ca permite folosirea oricarei legi de fluaj.

Algoritmul este dezvoltat pe baza metodei generale a elementelor finite si a fost fundamentat prin lucrarile [1, 2].

Sistemul de conducte se discretizeaza în elemente finite de tip bara, discretizarea fiind aceeasi cu cea considerata la calculul static în domeniul elastic, efectuat prin metoda deplasarilor.

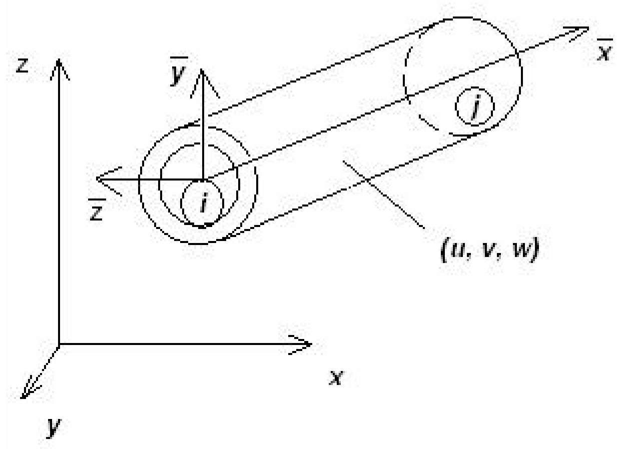

Fig. 1

În figura 1 se prezinta un astfel de element, de tip bara, la capetele caruia eforturile si respectiv deplasarile fata de sistemul de axe propriu al elementului $\left(\overline{x}\overline{y}\overline{z}\right)$ se aranjeaza în vectorii coloana:

$$\underline{\overline{Q}}^{(e)} = \left[\overline{N_i}\ \ \overline{T_i}^{\,y}\ \ \overline{T_i}^{\,z}\ \ \overline{M_i}^{\,x}\ \ \overline{M_i}^{\,y}\ \ \overline{M_i}^{\,z}\ \ \overline{N_j}\ \ \overline{T_j}^{\,y}\ \ \overline{T_j}^{\,z}\ \ \overline{M_j}^{\,x}\ \ \overline{M_j}^{\,y}\ \ \overline{M_j}^{\,z}\ \right]^T, \qquad (1)$$

$$\underline{\overline{Z}}^{(e)} = \left[\overline{u_i}\ \ \overline{v_i}\ \ \overline{w_i}\ \ \overline{j_i}^{\,x}\ \ \overline{j_i}^{\,y}\ \ \overline{j_i}^{\,z}\ \ \overline{u_j}\ \ \overline{v_j}\ \ \overline{w_j}\ \ \overline{j_j}^{\,x}\ \ \overline{j_j}^{\,y}\ \ \overline{j_j}^{\,z}\ \right]^T, \qquad (2)$$

unde indicele superior T indica operatia de transpunere.

Deplasarile u, v, w ale unui punct curent al elementului formeaza vectorul coloana

$$\underline{\Delta}^{(e)} = [u\ ,v\ \ ,w\ ]^T \qquad (3)$$

care se exprima în functie de deplasarile nodurilor prin relatia

$$\underline{\Delta}^{(e)} = \underline{H}\ \underline{\overline{Z}}^{(e)}. \qquad (4)$$

Deformatiile specifice dintr-un punct curent al elementului se exprima matriceal, în functie de deplasarile nodurilor, sub forma

$$\underline{e}(x,y,z) = \begin{bmatrix} e_x \\ g_{xq} \end{bmatrix} = \underline{B}\underline{\overline{Z}}^{(e)}, \qquad (5)$$

unde $\underline{B}$ reprezinta o matrice dreptunghiulara (2x12).

Se considera ca deformatiile specifice $\underline{e}(x,y,z\ )$ se compun din deformatii elastice $(\underline{e}^E\ )$, din deformatii de fluaj $(\underline{e}^c\ )$ si deformatii din temperatura $(\underline{e}^{t^0}\ )$

$$\underline{e}(x,y,z) = \underline{e}^E(x,y,z) + \underline{e}^c(x,y,z) + \underline{e}^{t^0}. \qquad (6)$$

Explicitând deformatiile elastice $(\underline{e}^E\ )$ si tinând seama de relatia dintre tensiuni si deformatii în domeniul elastic

$$\underline{s}\ = \underline{E}\underline{e}^E, \qquad (7)$$

unde $\underline{E}$ reprezinta matricea de elasticitate, rezulta

$$\underline{s}\ = \underline{E}\underline{e}(x,y,z) - \underline{E}\underline{e}^c(x,y,z) - \underline{E}\underline{e}^{t^0}. \qquad (8)$$

Tinând seama de (5), relatia (8) devine

$$\underline{s}\ = \underline{E}\underline{B}\underline{\overline{Z}}^{(e)} - \underline{E}\underline{e}^c(x,y,z) - \underline{E}\underline{e}^{t^0}. \qquad (9)$$

Aplicând principiul lucrului mecanic virtual în varianta deplasarilor virtuale, rezulta ca pentru orice deplasare virtuala $d\,\overline{\underline{Z}}^{(e)}$ trebuie îndeplinita egalitatea

$$d\,\overline{L}_{ex} = d\,\overline{L}_{ef}\ . \tag{10}$$

Întrucât fortele exterioare sunt numai fortele nodale $\overline{\underline{Q}}^{(e)}$, lucrul mecanic al acestora în deplasarea virtuala $d\,\overline{\underline{Z}}^{(e)}$ este

$$d\,\overline{L}_{ex} = d\,\overline{\underline{Z}}^{(e),T}\,\overline{\underline{Q}}^{(e)}. \tag{11}$$

Corespunzator deplasarii virtuale $d\,\overline{\underline{Z}}^{(e)}$ si tinând seama de (5) rezulta deformatiile specifice virtuale

$$d\,\underline{e}(x,y,z) = d\left(\underline{B}\overline{\underline{Z}}^{(e)}\ \right) = \underline{B}d\,\overline{\underline{Z}}^{(e)}\ . \tag{12}$$

Lucrul mecanic virtual al tensiunilor $\underline{s}$ (9), pe întreg volumul elementului, folosind (5), se determina cu expresia

$$\begin{aligned} d\,\overline{L}_{ef} &= \int_{(V)} d\underline{e}^T\,\underline{s}\,dV = d\,\overline{\underline{Z}}^{(e),T}\int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{B}\overline{\underline{Z}}^{(e)}dV - \\ &- d\,\overline{\underline{Z}}^{(e),T}\int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{e}^c dV - d\,\overline{\underline{Z}}^{(e),T}\int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{e}^{t^0}\,dV. \end{aligned} \tag{13}$$

Prin introducerea expresiilor (11) si (13) în (10), rezulta

$$d\,\overline{\underline{Z}}^{(e),T}\,\overline{\underline{Q}}^{(e)} = d\,\overline{\underline{Z}}^{(e),T}\cdot\left[\left(\int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\,\underline{B}dV\right)\overline{\underline{Z}}^{(e)} - \int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{e}^c dV - \int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{e}^{t^0}\,dV\right]. \tag{14}$$

Întrucât aceasta egalitate trebuie sa existe pentru orice deplasare virtuala posibila $d\,\overline{\underline{Z}}^{(e)}$, rezulta relatia

$$\overline{\underline{Q}}^{(e)} = \left(\int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{B}dV\right)\overline{\underline{Z}}^{(e)} - \int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{e}^c dV - \int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{e}^{t^0}\,dV\ , \tag{15}$$

unde

$$\overline{\underline{K}}^{(e)} = \int_{(V)} \underline{B}^T\,\underline{E}\underline{B}dV \tag{16}$$

reprezinta matricea de rigiditate a elementului finit considerat care este o matrice patratica având 12×12 elemente.

Tinând seama de (16) relatia (15) devine

$$\overline{\underline{K}}^{(e)}\overline{\underline{Z}}^{(e)} = \overline{\underline{Q}}^{(e)} + \int_{(V)} \underline{B}^T \underline{Ee}^c dV + \int_{(V)} \underline{B}^T \underline{Ee}^{t^0} dV. \tag{17}$$

Introducând notatiile

$$\overline{\underline{F}}^{f,(e)} = \int_{(V)} \underline{B}^T \underline{Ee}^c dV \tag{18}$$

pentru vectorul fortelor nodale din fluaj si

$$\overline{\underline{F}}^{t^0,(e)} = \int_{(V)} \underline{B}^T \underline{Ee}^{t^0} dV,$$

pentru vectorul fortelor nodale din temperatura, relatia (17) devine

$$\overline{\underline{K}}^{(e)}\overline{\underline{Z}}^{(e)} = \overline{\underline{Q}}^{(e)} + \overline{\underline{F}}^{f,(e)} + \overline{\underline{F}}^{t^0,(e)}. \tag{19}$$

Pentru structura în ansamblu este necesar ca necunoscutele deplsari si rotatii de noduri sa fie considerate într-un sistem general de axe O x z y. În acest scop, se defineste matricea de rotatie a elementului

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \underline{L}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}_1 \end{bmatrix},$$

unde

$$\underline{L}_1 = \begin{bmatrix} \underline{L}_0 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}_0 \end{bmatrix},$$

iar prin $\underline{L}_0$ se întelege matricea cosinusilor directori ai axelor locale $\overline{xyz}$ fata de axele generale

$$\underline{L}_0 = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}.$$

Vectorii $\underline{Q}^{(e)}$, $\underline{F}^{f,(e)}$, $\underline{F}^{t^0,(e)}$, exprimati fata de sistemul general de axe al sistemului de conducte (x y z), se obtin în functie de vectorii $\overline{\underline{Q}}^{(e)}$, $\overline{\underline{F}}^{f,(e)}$, $\overline{\underline{F}}^{t^0,(e)}$ stabiliti fata de sistemul propriu al elementului $(\overline{x}\overline{y}\overline{z})$, cu relatiile:

$$\underline{Q}^{(e)} = \underline{L}^T \overline{\underline{Q}}^{(e)}, \quad \underline{F}^{f,(e)} = \underline{L}^T \overline{\underline{F}}^{f,(e)}, \quad \underline{F}^{t^0} = \underline{L}^T \overline{\underline{F}}^{t^0}, \tag{20}$$

în care $\underline{L}^T$ este transpusa matricei de rotatie a elementului $\underline{L}$.

Matricea de rigiditate a elementului în sistemul general de axe $\left(\underline{K}^{(e)}\right)$ în functie de cea în sistemul local de axe $\left(\overline{\underline{K}}^{(e)}\right)$ este data de relatia

$$\underline{K}^{(e)} = \underline{L}^T \overline{\underline{K}}^{(e)} \underline{L}.$$

Fata de sistemul general de axe (x y z), relatia (19) se scrie

$$\underline{K}^{(e)} \underline{Z}^{(e)} = \underline{Q}^{(e)} + \underline{F}^{f,(e)} + \underline{F}^{t^0,(e)}. \tag{21}$$

Folosind aceasta relatie si scriind echilibrul nodurilor structurii se obtine sistemul ecuatiilor de conditie

$$\underline{K}\underline{Z} = \underline{R}, \tag{22}$$

în care $\underline{Z}$ reprezinta vectorul necunoscutelor (deplasarilor tuturor nodurilor), $\underline{K}$ - matricea de rigiditate a întregii structuri, $\underline{R}$ - vectorul actiunilor exterioare.

$$\underline{R} = \underline{F} + \underline{F}^f + \underline{F}^{t^0}. \tag{23}$$

În (23), $\underline{F}$ reprezinta vectorul fortelor nodale din sarcinile exterioare.

$$\underline{F}^f = \left[\underline{F}_1^f, \underline{F}_2^f, \ldots, \underline{F}_n^f\right]^T \tag{24}$$

reprezinta vectorul fortelor nodale din fluaj si

$$\underline{F}^{t^0} = \left[\underline{F}_1^{t^0}, \underline{F}_2^{t^0}, \ldots, \underline{F}_n^{t^0}\right]^T \tag{25}$$

vectorul fortelor nodale din temperatura. Se precizeaza ca fiecare componenta $\underline{F}_j^f$ a vectorului (25) însumeaza toate componentele din nodul j ale tuturor elementelor care concura la acest nod.

Sistemul (22) desi are forma sistemului ecuatiilor de conditie ale metodei deplasarilor, este un sistem neliniar, deoarece vectorul $\underline{R}$, prin componentele de fluaj $\left(\underline{F}^f\right)$, depinde de valorile $\underline{Z}$. În consecinta, rezolvarea lui necesita o metodologie speciala fie prin modificarea matricei $\underline{K}$ tinând seama de variatia în timp a deplasarilor, fie printr-o evaluare incrementala a vectorului $\underline{F}^{f}$ dezvoltata în timp pâna la stabilizarea valorilor $\underline{Z}$.

Bibliografie

1. Grigore, N. – Contributii privind calculul la fluaj al învelisurilor subtiri cu aplicatii la aparate si conducte specifice industriei petrochimice, Teza de doctorat, Institutul de Petrol si Gaze, Ploiesti, 1987.
2. Posea, N., Anghel, Al., Grigore, N., Mincu, V. – Statica si dinamica sistemelor de conducte. Verificari de rezistenta, fluaj, durabilitate, Editura Academiei Române, Bucuresti, 1996.